RF-002

架空名義操作不可能な組合せオークションメカニズム: VCG メカニズムの改良

A False-name-proof Combinatorial Auction Mechanism: A variation of VCG Mechanism

毛利 貴之* Takayuki Mouri
東藤 大樹*† Taiki Todo
岩崎 敦* Atsushi Iwasaki
横尾 真* Makoto Yokoo

1　序論

1.1　研究の背景

インターネットオークションは, 急成長している電子商取引の重要な一分野であり，人工知能／エージェント技術の有望な適用領域である [1, 14]. インターネットの利用により, 低コストで大規模なオークションが実行可能となった反面, 不特定多数の人々が参加可能であることから, オークション方式 (オークションメカニズム) の設計にあたっては, 様々な不正行為に対する頑健性, オークションの結果に関するなんらかの理論的な裏付け等が重要となるものと考えられる. 複数の戦略的行動をするエージェントが集団で意思決定を行う場合に, 社会的に望ましい結果が得られるように社会的ルールを設計することは，メカニズムデザインと呼ばれ，ミクロ経済学，ゲーム理論の一分野として活発に研究が行われている．

インターネットオークションに関連する研究の 1 つに組合せオークション [2] がある．通常のオークションは，一度に 1 つの商品 (財) を販売するが，組合せオークションでは，価値に依存性のある (代替性や補完性) 複数種類の異なる財が販売され，入札者は財の組合せ (バンドル) に対して入札を行う．入札者の複雑な選好を考慮することで，入札者の効用および主催者の利益を増加させることが可能になる．理論的に優れた性質を持つ組合せオークションメカニズムとして，Vickrey-Clarke-Groves (VCG) メカニズム [7] が知られている．VCG メカニズムは，公共財を対象とした Clarke-Groves (CG) メカニズムの一種である．CG メカニズムは，社会的選択理論の研究において，公共財に対して便益を共有する人々に真の評価値を申告させるメカニズムとして提案されたものである．VCG メカニズムは，真の評価値を申告することが最適な戦略 (支配戦略) となることを保証する組合せオークションメカニズムである．

インターネットは組合せオークションのような複雑な取引を実行するインフラを安価に提供しており，組合せオークションの利用は拡大していくと予想される．このようにインターネットは組合せオークションを行う上で非常に優れた環境を提供している一方で，ネットワークでの匿名性を利用した新しい不正行為である架空名義入札 (操作) の可能性が指摘されている [11, 13]．架空名義入札とは，ある入札者が複数の名義を使ってオークションに参加し，自分の利益を大きくしようとする不正行為である．架空名義入札は個人で行うことが可能なため，実行が容易である．更に，インターネット環境において参加者を識別することはほとんど不可能なため，防ぐことは困難である．したがって，インターネットオークションにおいて架空名義入札は深刻な問題となり得る．

これまで架空名義入札に関する研究は多数行われている．まず，架空名義入札が可能である場合，VCG メカニズムが架空名義入札に脆弱であることが指摘されている [6, 12]．更に，個人合理性，パレート効率性，架空名義入札への頑健性を同時に満たす組合せオークションメカニズムは存在しないという不可能性定理が示されている [6, 11, 12]．架空名義入札に頑健なメカニズムはいくつか提案されている．例えば，最小バンドル (minimal bundle, MB) [9] メカニズム，レベル付き分割セット (leveled division set, LDS) [13] メカニズム等が提案されているが，メカニズムの分かりやすさ，割当結果の効率性，理論的性質，計算量等のいくつかの評価基準において，決定版と呼べるような優れたメカニズムは未だ存在しない．本論文では，VCG メカニズムをベースとした，新しい架空名義入札に頑健な組合せオークションメカニズムを提案する．

* 九州大学大学院システム情報科学府
† 日本学術振興会特別研究員 DC1

1.2 関連研究

組合せオークションの研究は多岐に渡って行われており，その一つとして勝者決定問題が挙げられる．

組合せオークションでは，オークションの勝者は複数存在することになり，勝者を決めることが複雑な制約最適化問題となる．売手は入札額の和が最大化されるように商品の割当方法を決定する必要があり，これを勝者決定問題と呼ぶ．勝者決定問題の難しさは，入札者数を n とすると，勝者の可能な組合せの数が 2^n と指数的に増加する点にある．これは Weighted Set Packing 問題の一種であり，NP 困難と呼ばれる問題のクラスに属する．つまり，解を求めるための効率的な (多項式時間で解ける) アルゴリズムが存在せず，最悪の場合は指数的な時間が必要となるということである．この問題に関しては，人工知能分野での探索の技術を導入した種々の最適化手法が提案されている [1].

また，キーワード連動広告オークションが近年では，広く用いられるようになっている．具体的には，広告主は検索エンジン (Google や Yahoo!) のキーワードに対して入札額を設定する．キーワードがユーザによって検索されると，基本的には入札額の高い順に，検索結果とは別に，例えば画面の右端に広告が提示される．これらの広告料の決定において，Generalized Second Price Auction (GSP) と呼ばれる，ビックレー入札に準じたメカニズムが用いられている [3, 8].

2 準備

本章では，本論文で扱う組合せオークションメカニズムについて説明する．まず，問題の定式化を行い，オークションメカニズムが社会的に望ましくなるための満たすべき性質について説明する．次にメカニズムの記述方法について述べ，代表的なメカニズムである VCG メカニズムを紹介する．

2.1 問題の定式化

存在しうる入札者の集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$，財の集合を $M = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ として，各入札者 i は財の組合せ (バンドル) $B \subseteq M$ に対する評価値を持つ．入札者 i のバンドル $B \subseteq M$ に対する評価値は，タイプと呼ばれる $\theta_i \in \Theta$ を用いて $v(B, \theta_i)$ で表現する．バンドルに関する評価値は常に，$B' \supseteq B$ に対して $v(B', \theta_i) \geq v(B, \theta_i)$ が成立する．また，申告するタイプの組を $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \Theta^n$ とする．ここで入札者のタイプに関する仮定として single-minded bidder および k-minded bidder を定義する．

定義 1 (single-minded bidder)**.** Single-minded bidder とは，唯一のバンドル（もしくはそのスーパセット）のみを必要とする入札者を意味する．すなわち，もし，ある入札者 i が single-minded ならば，あるバンドル B_i が存在し，$B'_i \supseteq B_i$ となる任意の B'_i に対して $v(B'_i, \theta_i) = v(B_i, \theta_i) > 0$ が成立する，かつ全ての $B'_i \not\supseteq B_i$ において $v(B'_i, \theta_i) = 0$ が成立する．

次に single-minded bidder の一般化として，k 個のバンドルのいずれかを必要とする k-minded bidder を定義する．ここで，$k = 2^m - 1$ とすれば，任意の入札者を k-minded bidder として表現できる．

定義 2 (k-minded bidder)**.** k-minded bidder とは，k 個のバンドル（もしくはそのスーパセット）のみを必要とする入札者を意味する．すなわち，もし，入札者 i が k-minded ならば，ある k 個のバンドル $B_1, \ldots, B_k$ が存在し，任意のバンドル B に関して，$v(B, \theta_i) = \max_{B_j \subseteq B} v(B_j, \theta_i)$ が成立する．

組合せオークションメカニズム $\mathcal{M}(X, p)$ は，一般に割当規則と支払規則という 2 つの関数によって構成される．A を可能な財の割当の集合とすると，割当規則 $X : \Theta^n \to A$ は，各入札者の申告したタイプの組を入力とし，各入札者への財の割当を出力する．支払規則 $p : \Theta^n \to \mathbb{R}^n$ は，各入札者の申告したタイプの組を入力とし，各入札者が支払う金額を決定する．さらに i が申告したタイプの組を θ_i とし，i 以外の入札者が申告したタイプの組を θ_{-i} とする．このとき i が θ_i を申告したときの i への割当及び支払額をそれぞれ $X_i(\theta_i, \theta_{-i})$，$p_i(X_i(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_{-i})$ と表すこととする．また，可能な財の割当を $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$ とするとき，入札者 i に割り当てられるバンドルを a_i とする．入札者 i がバンドル B を獲得し，支払額 $p_i(B, \theta_{-i})$ を支払った場合の効用を $v(B, \theta_i) - p_i(B, \theta_{-i})$ と定義する．入札者 i が何も獲得できないときの支払額 $p_i(\emptyset, \theta_{-i})$ は 0 とする．

メカニズム設計者は社会的に望ましい性質を満たすようにメカニズムを設計する．本論文では以下の 4 つの性質を定義する．

定義 3 (パレート効率性)**.** $\forall i \in N, \forall \theta_i, \forall a \in A$ において，

$$X(\theta) \in \arg\max_{a \in A} \sum_{i \in N} v(a_i, \theta_i)$$

を満たすとき，割当はパレート効率的である．ただし，$X(\theta) = (X_1(\theta), \ldots, X_n(\theta))$ と表す．

ここで，割当がパレート効率的であるとは全ての参加者の効用の和，すなわち社会的余剰が最大化されることを意味する．したがって，パレート効率的な割当が実現している場合，いずれかの入札者の効用を犠牲にしない

限り，他の入札者の効用を増加させるような割当を作ることはできない．

定義 4 (個人合理性)**.** $\forall i \in N, \forall \theta_i$ において，

$$v(X_i(\theta), \theta_i) - p_i(X_i(\theta), \theta_{-i}) \geq 0$$

を満たすとき, 組合せオークションメカニズム $\mathcal{M}(X, p)$ は個人合理性を満たす.

個人合理性とは，他の入札者の申告に関わらず，各入札者は自分のタイプを正直に申告することによって損をすることはないという性質である．

定義 5 (戦略的操作不可能性)**.** θ_i を入札者 i の真のタイプとし，θ'_i を入札者 i の偽のタイプとする．$\forall i \in N, \forall \theta_{-i}, \forall \theta_i, \theta'_i$ において，

$$\begin{aligned} &v(X_i(\theta), \theta_i) - p_i(X_i(\theta), \theta_{-i}) \\ &\geq v(X_i(\theta'_i, \theta_{-i}), \theta_i) - p_i(X_i(\theta'_i, \theta_{-i}), \theta_{-i}) \end{aligned}$$

を満たすとき, 組合せオークションメカニズム $\mathcal{M}(X, p)$ が戦略的操作不可能性を満たす.

任意の入札者において，自分の真のタイプを申告したとき自分の効用が最大となる．すなわち，任意の入札者にとって各財に対して真の評価値を入札することが（弱）支配戦略であるとき，そのメカニズムは戦略的操作不可能であるという．

最後に，組合せオークションメカニズム $\mathcal{M}(X, p)$ が架空名義操作不可能性を満たすことを定義する．オークションにおける架空名義操作とは，一人の入札者が複数の名義を使って複数の入札を行い，効用を増加させようとする行為である．まず，架空名義操作に関する記法を導入する．ある入札者 i が s 個の名義 $id_1, \ldots, id_s$ を用いるとする．次に，入札者 i が用いる (架空) 名義の集合を表すために，関数 $\phi(i) = \{id_1, \ldots, id_s\}$ を導入する．このとき，申告されたタイプの組を $\theta = (\theta_{id_1}, \ldots, \theta_{id_s}, \theta_{s+1}, \ldots, \theta_n)$ とする．ここで，$\theta_{-\phi(i)}$ を定義する．$\theta_{-\phi(i)}$ とは，入札者 i が用いる s 個の名義 $id_1, \ldots, id_s$ を除くタイプの集合である．また，入札者 i がただ 1 つの名義を用いて入札する場合の申告の組を $(\theta_i, \varnothing, \ldots, \varnothing, \theta_{s+1}, \ldots, \theta_n)$ と表す.

定義 6 (架空名義操作不可能性)**.** 組合せオークションメカニズム $\mathcal{M}(X, p)$ が架空名義操作不可能性を満たすとは,

$\forall i \in N, \forall \phi(i), \forall \theta_i, \forall \theta_{\phi(i)}$ において，

$$\begin{aligned} &v(X_i((\theta_i, \varnothing, \ldots, \varnothing), \theta_{-\phi(i)}), \theta_i) \\ &-p_i(X_i((\theta_i, \varnothing, \ldots, \varnothing), \theta_{-\phi(i)})), \theta_{-i}) \\ &\geq v(\bigcup_{l \in \phi(i)} X_l(\theta_{\phi(i)}, \theta_{-\phi(i)}), \theta_i) \\ &- \sum_{l \in \phi(i)} p_i(X_l(\theta_{\phi(i)}, \theta_{-\phi(i)}), \theta_{-l}) \end{aligned}$$

を満たすことをいう．すなわち，入札者は名義を複数用いて入札するよりも，単一の名義を用いて入札することが最良の策となる.

2.2 価格ベース・調整不要メカニズム

価格ベース・調整不要 (Price-Oriented, Rationing-Free, PORF) メカニズム [9] は戦略的操作不可能なメカニズムの一般的な記述方法である．従来のメカニズム記述法では，まず勝者の決定方法を記述し，次に支払額の計算方法を記述する．これに対して，PORF メカニズムでは，入札者の各バンドルに対する価格の計算方法のみを記述する．PORF メカニズムは従来のメカニズムの記述法と大きく異なっているが，任意の戦略的／架空名義操作不可能メカニズムは，PORF メカニズムとして記述可能である．

PORF メカニズムは以下のように定義される．

- 入札者 $i \in N$ は自分のタイプ $\hat{\theta}_i$ を申告する (真のタイプ θ_i を申告するとは限らない) .
- 入札者 i に対して，任意のバンドル $B \subseteq M$ の価格 $p_i(B, \theta_{-i})$ を定義する．この価格は i が申告したタイプと独立に決定しなければならないが，他の入札者が申告したタイプに依存してもよい.
- $B \subseteq B'$ なら $p_i(B, \theta_{-i}) \leq p_i(B', \theta_{-i})$ とし，更に $p_i(\emptyset, \theta_{-i}) = 0$ を仮定する.
- 入札者 i に対して，効用 $v(B, \hat{\theta})_i - p_i(B, \theta_{-i})$ を最大化するバンドル B を割り当て，その支払額を $p_i(B, \theta_{-i})$ とする．効用を最大化するバンドルが複数存在する場合は，いずれか 1 つを割り当てる.
- 割当結果は割当可能性を満たす．すなわち，入札者 i, j に割り当てられるバンドル B_i, B_j に関して，$B_i \cap B_j = \emptyset$ が成立する.

以上の定義より，価格は自分の申告したタイプとは独立に決定される．また，入札者は他者の割当結果とは独立に，自分の効用を最大化するバンドルを獲得することができる．したがって，以下の定理が成立することを証明している.

定理 1. あるメカニズムが戦略的操作不可能ならば，PORF メカニズムとして記述可能である.

PORF メカニズムの架空名義操作不可能性に関して，本論文では，弱匿名価格ルール (weakly-anonymous pricing rule, WAP) [9] を満たすメカニズムに議論を限定する．

定義 7 (弱匿名価格ルール)**.** 入札者 i に着目し，i 以外の入札者の集合を N' とする．N' に含まれる入札者によって申告されたタイプの組を $\theta_{N'}$ とする．このとき，i に対して提示されるバンドル B の価格は i の申告したタイプ θ_i に依存しない．すなわち，$p(B,\theta_{N'})$ で表わされる．

この仮定により，他の入札者のタイプの集合が同じであれば，全ての入札者に関して，同じバンドルへの支払額は同じとなる．WAP はきわめて自然な仮定であり，ほとんど全てのメカニズムはこの性質を満足する．

次に弱匿名価格ルールを用いた PORF メカニズムに関して，非優加法的価格増加条件 (no super-additive price increase condition, NSA) [9] を定義する．

定義 8 (非優加法的価格増加条件)**.** 任意の入札者の集合 $S \subseteq N$，$N' = N \setminus S$，および $i \in S$ に関して，B_i が i の効用を最大化するバンドルであるとき，

$$\sum_{i\in S} p(B_i, \bigcup_{j\in S\setminus\{i\}} \{\theta_j\} \cup \theta_{N'}) \geq p(\bigcup_{i\in S} B_i, \theta_{N'})$$

が成立する．

この条件は，バンドルの和集合を単一の名義を用いて獲得した場合の支払額 (右辺) が，個別の名義を用いて獲得した場合の支払額の和 (左辺) よりも小さいことを意味している．WAP および NSA を同時に満たす PORF メカニズムは架空名義操作不可能となることが証明されている [9].

2.3 VCG メカニズム

本節では，Vickrey-Clarke-Groves (VCG) メカニズム [7] の PORF 記述を示す．VCG は代表的な組合せオークションメカニズムの 1 つであり，架空名義入札が許されない状況ならば，戦略的操作不可能性，パレート効率性，個人合理性の 3 つを満足するメカニズムである．これまで示してきたように PORF は戦略的操作不可能なメカニズムであるため，以降では入札者 i は常に真のタイプ θ_i を申告すると仮定する．

まず，メカニズムの記述を簡単にするため，V^* を導入する．任意の入札者の集合 S と財の集合 B および S に属する入札者のタイプ集合 θ_S に関して，財の集合 B を S 中の入札者に最適に割り当てた場合の効用の総和を $V^*(B,\theta_S)$ とする．より正確には，θ_i を入札者 i のタイプ $i \neq i'$ について $g = \{(B_1, B_2, \ldots) | \bigcup_{i\in S} B_i \subseteq B, B_i \cap B_{i'} = \emptyset\}$ を可能な財の割当として，$V^*(B,\theta_S)$ を $\max_g \sum_{i\in S} v(B_i,\theta_i)$ で定義する．そして，V^* を用いて入札者 $i \in N$ に対するバンドル $B \in M$ の支払額を以下で決定する．

表 1　架空名義入札の存在しない場合

	$\{g_1\}$	$\{g_2\}$	$\{g_1, g_2\}$
入札者 1	9	1	10
入札者 2	6	0	8

$$p_i(B,\theta_{-i}) = V^*(M,\theta_{N\setminus\{i\}}) - V^*(M\setminus B,\theta_{N\setminus\{i\}}) \quad (1)$$

このメカニズムはパレート効率的な割当において，i が B を獲得するとき，$p_i(B,\theta_{-i})$ は VCG メカニズムにおける支払額と等しくなり，B は i の効用を最大化する．

しかし，VCG メカニズムは戦略的操作不可能性，パレート効率性，個人合理性を満たす一方で，架空名義操作不可能性を満たさないことが示されている．

定理 2. VCG メカニズムは架空名義操作不可能性を満たさない [6, 12].

定理 2 が成立することは，次の例を考えることによって確認できる．

例 1. VCG メカニズムを用いて 2 人の入札者に 2 つの財を販売する組合せオークションを考える．まず，入札者 1 及び 2 のタイプが表 1 で与えられている場合を考える．このとき，パレート効率的な割当により入札者 1 がバンドル $\{g_1, g_2\}$ を獲得し，入札者 2 は何も獲得できない．このときの入札者 1 の支払い額 $p_1(\{g_1,g_2\},\theta_{-1})$ を以下のように決定する：

$$p_1(\{g_1,g_2\},\theta_{-1}) = 8 - 0 = 8.$$

次に，入札者 1 が 1’ という架空名義を用いて，2 つの名義から入札する場合を考える．表 2 がそれぞれの名義によって申告されたタイプを表しているとする．このとき，パレート効率的な割当により，名義 1 及び 1’ がそれぞれ財 g_1 , g_2 を獲得する．ここで，式 (1) によって支払額を計算すると，名義 1 及び 1’ の支払額 $p'_1(\{g_1\},\theta_{-1}), p'_{1'}(\{g_2\},\theta_{-1'})$ は

$$p'_1(\{g_1\},\theta_{-1}) = (6+5) - 5 = 6$$
$$p'_{1'}(\{g_2\},\theta_{-1'}) = 10 - 9 = 1$$

となる．よって，入札者 1 は支払額 7 でバンドル $\{g_1, g_2\}$ を獲得でき，架空名義操作を行わない場合に比べて効用が増加している．

架空名義操作が不可能な環境では VCG メカニズムがパレート効率性を満たすただ 1 つの戦略的操作不可能な

表 2　入札者 1 が架空名義 1’ を用いて 2 名義で入札した場合

	$\{g_1\}$	$\{g_2\}$	$\{g_1, g_2\}$
入札者 1	9	1	10
入札者 2	6	0	8
入札者 1’	1	5	5

組合せオークションメカニズムであることが知られている [4]．それゆえ，定理 2 より架空名義操作不可能性とパレート効率性を同時に満たす組合せオークションメカニズムは存在しないことが示される．このため，架空名義操作不可能性を満たし，かつ可能な限り社会的余剰を大きくする割当を実現可能な組合せオークションメカニズムの設計が重要な課題となっており，従来研究では，複数の架空名義操作不可能な組合せオークションメカニズムが設計されている（例えば，[5, 9, 10, 13] など）．

3　名義選択メカニズム

本章では，架空名義操作不可能な新たなメカニズムを提案する．まず，提案メカニズムを述べ，実際の動作例を挙げる．次に，提案メカニズムが架空名義操作不可能性を満たすことを理論的に証明する．

3.1　提案メカニズム

本節では，新しい架空名義操作不可能な組合せオークションメカニズムとして，架空名義の可能性のある名義を除外して支払額を決定する名義選択メカニズムを提案する．このメカニズムは PORF メカニズムで記述されるが，顕示原理により割当可能性を満たす PORF で記述したメカニズムに限定しても一般性は失うことはない．

以下に提案メカニズムの概要を述べる．まず，入札者の集合を N，財の集合を M とする．入札者 i の価格を計算する際に，$N \setminus \{i\}$ に含まれる入札者 j が k-minded である場合，j を k 人の single-minded な入札者に置き換える．この操作を入札者の分割と呼ぶ．入札者の分割によって得られた新しい入札者集合を $[N \setminus \{i\}]^s$ と記述する．入札者 i がバンドル B を獲得するときの支払額を以下に示す．

$$p_i(B, \theta_{-i}) = \max_{N'' \subseteq [N \setminus \{i\}]^s} [V^*(M, \theta_{N''}) - V^*(M \setminus B, \theta_{N''})].$$

入札者を k 人の single-minded bidders に分割するとは，例えば，表 3 で与えられるタイプを持つ入札者 i が存在するとき，表 4 で与えられるタイプを持つ入札者 ia, ib に分割することをいう．支払額は，B とコンフリクトしている，互いに素なバンドルの集合の評価値の和の最大値をとる．B とコンフリクトしているとは，あるバンドル B' が $B' \cap B \neq \emptyset$ であることをいう．

表 3　入札者 i が持つタイプ

	$\{g_1\}$	$\{g_2\}$	$\{g_1, g_2\}$
入札者 i	6	0	8

表 4　入札者 i を分割したときの各入札者の持つタイプ

	$\{g_1\}$	$\{g_2\}$	$\{g_1, g_2\}$
入札者 ia	6	0	6
入札者 ib	0	0	8

名義選択メカニズムは $[N \setminus \{i\}]^s$ に含まれる任意の名義の集合を選び，支払額を決定することで，架空名義不可能性を実現している．実際，ここで新規に名義を加えて，入札を増やしたとしても，その増やした入札が支払額を減らすようであれば，その入札の影響を除外する．一方で，VCG メカニズムでは新規に入札が加わることで支払額が減少するので，VCG メカニズムにおける価格を $p_i^{VCG}(B, \theta_{-i})$ としたとき，$p_i(B, \theta_{-i}) \geq p_i^{VCG}(B, \theta_{-i})$ が常に成立する．

続いて，例 1 に名義選択メカニズムを適用し，このメカニズムが架空名義操作不可能であることを述べる．

例 2. *2 人の入札者に 2 つの財を販売する組合せオークションを考える．入札者 1 および 2 のタイプが表 1 で与えられている．このとき，VCG メカニズムを適用させると，例 1 で示したパレート効率的な割当により入札者 1 がバンドル* $\{g_1, g_2\}$ *を支払額 8 で獲得し，入札者 2 は何も獲得できない．ここで，入札者 1 が 1’ という架空名義を用いて，合計 2 名義で入札した場合を考える．表 2 がそれぞれの名義によって申告されたタイプを表している．このとき，VCG メカニズムを適用させると，例 1 より入札者 1 がバンドル* $\{g_1\}$ *を支払額 6 で，入札者 1’ がバンドル* $\{g_2\}$ *を支払額 1 で獲得する．よって入札者 1 は架空名義入札を行うとき，財* g_1, g_2 *を合計支払額 7 で獲得することができ，架空名義入札を行う前に比べて効用が増加している．*

では次に名義選択メカニズムを適用する場合を考える．先ほどの 2 人 2 財の組合せオークションにおいて，それぞれのタイプは表 1 で与えられている．まず入札者 1 の支払額を計算するために 入札者 2 を 2a，2b と分割する．分割したタイプが表 5 で与えられている．

入札者 1 のバンドル $\{g_1\}$ *に対する支払額を求めると，*$\{g_1\}$ *にコンフリクトしているバンドルに入札を行っているのは入札者 2a，2b である．この中で評価値の和の最大値が支払額となり，入札者 1 のバンドル* $\{g_1\}$ *に対する支払額は 8 となる．入札者 1 のバンドル* $\{g_2\}$ *に対する支払額を求めると，*$\{g_2\}$ *にコンフリクトしている*

表5　入札者2を2a，2bに分割した場合

	$\{g_1\}$	$\{g_2\}$	$\{g_1, g_2\}$
入札者1	9	1	10
入札者2a	6	0	6
入札者2b	0	0	8

表6　名義選択メカニズムを適用させた支払額

	$\{g_1\}$	$\{g_2\}$	$\{g_1, g_2\}$
入札者1	8	8	8
入札者2	10	10	10

表7　架空名義を用いた場合に名義選択メカニズムを適用させた支払額

	$\{g_1\}$	$\{g_2\}$	$\{g_1, g_2\}$
入札者1	8	8	11
入札者2	10	10	11
入札者1’	10	10	10

バンドルに入札を行っているのは入札者*2b*である．したがって入札者*1*のバンドル$\{g_2\}$に対する支払額は*8*となる．

入札者*1*のバンドル$\{g_1, g_2\}$に対する支払額を求めると，$\{g_1, g_2\}$にコンフリクトしているバンドルに入札を行っているのは入札者*2a*，*2b*である．この中で評価値の和の最大値が支払額となり，入札者*1*のバンドル$\{g_1, g_2\}$に対する支払額は*8*となる．

同様の議論を入札者*2*に適用させたとき，それぞれの支払額は表6で与えられる．したがって入札者*1*がバンドル$\{g_1, g_2\}$を支払額*8*で獲得する．

では，入札者*1*が架空名義*1’*を用いて合計*2*名義で入札した場合を考える．それぞれのタイプは表2で与えられている．これを名義選択メカニズムに適用させると，それぞれの支払額は表7で与えられる．表7から，入札者*1*がバンドル$\{g_1\}$を支払額*8*で獲得することになり，架空名義入札を行う前に比べて，獲得できたはずの財が獲得できなくなっている．すなわち，架空名義入札を行う必要性がなくなり，名義選択メカニズムは架空名義入札に頑健であることがわかる．

3.2　割当可能性

本節では，名義選択メカニズムが割当可能性を満たすことを示す．その議論の前に割当可能性を定義する．

定義 9 (割当可能性)**.** 任意の入札者$i, j \neq i$がバンドルB_i^*, B_j^*を獲得するとき，$B_i^* \cap B_j^* = \emptyset$が成立する．

定理 3. 名義選択メカニズムは割当可能性を満たす．

証明. 名義選択メカニズムは割当可能性を満たさないと仮定する．すなわち，ある入札者i, jがバンドルB_i, B_jを獲得するとき，$B_i \cap B_j \neq \emptyset$が成立するこのとき，$v(B_i, \theta_i) > p_i(B_i, \theta_{-i}), v(B_j, \theta_j) > p_j(B_j, \theta_{-j})$が成立する． 入札者$i$がバンドル$B_i$を獲得するための支払額は，支払額の定義より，$B_i$とコンフリクトしている，互いに素なバンドルの集合の評価値の和の最大値をとる．先述した通り，本論文で扱う入札者はk-minded biddersであり, その入札者を各バンドルについてsingle-minded biddersである入札者に分割することが可能である．入札者jを分割するとバンドルB_jのみを欲しがる入札者j^cが入札者の集合$[N \setminus \{i\}]^s$の中に存在する．

$$
\begin{aligned}
p_i(B_i, \theta_{-i}) &= \max_{N'' \subseteq [N \setminus \{i\}]^s} [V^*(M, \theta_{N''}) - V^*(M \setminus B_i, \theta_{N''})] \\
&\geq v(M, \theta_{j^c}) - v(M \setminus B_j, \theta_{j^c}).
\end{aligned}
$$

入札者j^cはB_jのみを欲しがるので，$v(M \setminus B_j, \theta_{j^c}) = 0$，$v(M, \theta_{j^c}) = v(B_j, \theta_j)$が成立する． したがって，以下の式が成立する．

$$
\begin{array}{rcl}
v(B_i, \theta_i) & > & p_i(B_i, \theta_{-i}) \\
& \geq & v(M, \theta_{j^c}) - v(M \setminus B_j, \theta_{j^c}) \\
& = & v(B_j, \theta_j).
\end{array}
$$

同様の議論をB_jを獲得するjについて適用すると，$v(B_j, \theta_j) > v(B_i, \theta_i)$が成立するため, 仮定は矛盾する．したがってコンフリクトしているバンドルを同時に獲得する入札者は存在しないので，名義選択メカニズムは, 入札者を各バンドルについてsingle-minded biddersである入札者に分割することで, 割当可能性を満たす． □

3.3　架空名義操作不可能性

本節では名義選択メカニズムは架空名義操作不可能性を満たすことを示す．その議論に入る前に以下の補題が成立することを示す．

補題 1. 名義選択メカニズムでは，入札者数の増加に対して，任意の入札者の支払額は非減少である．

証明. 本証明は背理法を用いる．入札者の集合をNとし，各入札者を分割した入札者の集合をN^sとおく．更にNからiを除く入札者の集合をN'とおく．入札者iがバンドルBを獲得するとき，その支払額を$p_i(B, \theta_{N'^s})$とする．また，入札者$j \notin N$を含めた入札者の集合$N \cup \{j\}$において，入札者iがバンドルBを獲得するとき，その支払額を$p'_i(B, \theta_{[N' \cup \{j\}]^s})$とする．このとき，$p'_i(B, \theta_{[N' \cup \{j\}]^s}) < p_i(B, \theta_{N'^s})$が成立すると仮定する．$N'^s$において，$B$とコンフリクトしている，互いに素なバンドルの集合における勝者の集合を

N_W^s とする．支払額 $p_i(B, \theta_{N'^s})$ は以下の通りである．

$$\begin{aligned} p_i(B, \theta_{N'^s}) &= V^*(M, \theta_{N_W^s}) - V^*(M \setminus B, \theta_{N_W^s}) \\ &= V^*(M, \theta_{N_W^s}). \end{aligned}$$

また，入札者の集合 $[N' \cup \{j\}]^s$ において，B とコンフリクトしている，互いに素なバンドルの集合における i を除く勝者の集合を $N_W'^s$ とする．支払額 $p_i'(B, \theta_{[N' \cup \{j\}]^s})$ は以下の通りである．

$$\begin{aligned} p_i'(B, \theta_{[N' \cup \{j\}]^s}) &= V^*(M, \theta_{N_W'^s}) - V^*(M \setminus B, \theta_{N_W'^s}) \\ &= V^*(M, \theta_{N_W'^s}). \end{aligned}$$

V^* は財の集合における評価値の和の最大値をとる．ある入札者 j を分割したときの single-minded bidders である入札者を j^c とする．もし，$j^c \notin N_W'$ ならば，$N_W'^s = N_W^s$ が成立する．すなわち j^c の評価値を考慮しないことになるので，$V^*(M, \theta_{N_W'^s}) = V^*(M, \theta_{N_W^s})$ が成立する．また，$j^c \in N_W'^s$ ならば，B とコンフリクトしている，互いに素なバンドルの集合の評価値の和が j^c の評価値を考慮したときに最大値となるので，$V^*(B, \theta_{N_W'^s}) \geq V^*(B, \theta_{N_W^s})$ が成立する．

以上より，$p_i'(B, \theta_{[N' \cup \{j\}]^s}) \geq p_i(B, \theta_{N'^s})$ が成立し，仮定に矛盾する．したがって名義選択メカニズムは，入札者の増加に関して価格は非減少である． □

補題 1 より，以下の定理が成立する．

定理 4. 名義選択メカニズムは架空名義操作不可能性を満たす．

証明. 名義選択メカニズムが架空名義操作不可能性を満たすには，弱匿名価格ルールと非優加法的価格増加条件を満たすことを示せばよい．まず，支払額の定義より名義選択メカニズムが弱匿名価格ルールを満たすことは明らかである．次に，名義選択メカニズムが非優加法的価格増加条件を満たすことを示す．

入札者 i が 2 つの名義 i', i'' を用いて入札する状況を考える．ここで，$N' = N \setminus \{i, i', i''\}$ とする．また，各入札者を分割した入札者の集合を N^s とする．入札者 i がバンドル B_i を獲得するときの支払額を $p_i(B_i, \theta_{N'^s})$ とする．B_i とコンフリクトしている，互いに素なバンドルの集合において評価値の和が最大となる集合を W とし，W において入札者の集合 N から入札者 i, i', i'' を除いた残りの入札者を分割した中で，勝者となる入札者の集合を N_W^s とおく．このときの $p_i(B_i, \theta_{N'^s})$ は以下の通りである．

$$\begin{aligned} p_i(B_i, \theta_{N'^s}) &= V^*(M, \theta_{N_W^s}) - V^*(M \setminus W, \theta_{N_W^s}) \\ &= V^*(W, \theta_{N_W^s}). \end{aligned}$$

入札者 i が架空名義入札を行う状況として，以下の状況に場合分けされる．

Case 1.　名義を分割して効用を増加させる場合

Case 2.　勝者とならない名義を追加して効用を増加させる場合

まず Case 1 より，名義を分割して効用を増加させる場合を考える．入札者 i が名義を分割してバンドル B_i を獲得すると仮定する．それぞれの支払額は $p_{i'}(B_{i'}, \theta_{[N' \cup \{i''\}]^s}), p_{i''}(B_{i''}, \theta_{[N' \cup \{i'\}]^s})$ とする．すなわち，i' がバンドル $B_{i'}$ を，i'' がバンドル $B_{i''}$ を獲得する．このとき，$B_{i'} \cap B_{i''} = \emptyset, B_{i'} \cup B_{i''} = B_i$ である．

入札者の集合 N_W^s の条件下で，$B_{i'}$ とコンフリクトしている，互いに素なバンドルの集合において評価値の和が最大となる集合を $W' \subseteq W$ とし，$B_{i''}$ とコンフリクトしている，互いに素なバンドルの集合において評価値の和が最大となる集合を $W'' \subseteq W$ とする．このとき，$W' \cup W'' = W$ が成立する．i', i'' の支払額 $p_{i'}(B_{i'}, \theta_{[N' \cup \{i''\}]^s}), p_{i''}(B_{i''}, \theta_{[N' \cup \{i'\}]^s})$ を以下で表す．

$$\begin{aligned} p_{i'}(B_{i'}, \theta_{N_W^s}) &= V^*(M, \theta_{N_W^s}) - V^*(M \setminus W', \theta_{N_W^s}) \\ &= V^*(W', \theta_{N_W^s}), \\ p_{i''}(B_{i''}, \theta_{N_W^s}) &= V^*(M, \theta_{N_W^s}) - V^*(M \setminus W'', \theta_{N_W^s}) \\ &= V^*(W'', \theta_{N_W^s}). \end{aligned}$$

入札者の集合 N_W^s の条件下では，$V^*(W', \theta_{N_W^s}) + V^*(W'', \theta_{N_W^s}) \geq V^*(W, \theta_{N_W^s})$ が成立する． 名義選択メカニズムが非優加法的価格増加条件を満たすことを以下で示す．

$$\begin{aligned} & p_{i'}(B_{i'}, \theta_{N_W^s}) + p_{i''}(B_{i''}, \theta_{N_W^s}) - p_i(B_i, \theta_{N'^s}) \\ \geq\ & V^*(W', \theta_{N_W^s}) + V^*(W'', \theta_{N_W^s}) - V^*(W, \theta_{N_W^s}) \\ \geq\ & 0. \end{aligned}$$

更に $N_W \subseteq N$ であることから，$N_W^s \subseteq [N' \cup \{i'\}]^s$ および $N_W^s \subseteq [N' \cup \{i''\}]^s$ が成立している．ここで補題 1 より $p_{i'}(B_{i'}, \theta_{[N' \cup \{i''\}]^s}) \geq p_{i'}(B_{i'}, \theta_{N_W^s})$ かつ $p_{i''}(B_{i''}, \theta_{[N' \cup \{i'\}]^s}) \geq p_{i''}(B_{i''}, \theta_{N_W^s})$ が成立する．よって $p_{i'}(B_{i'}, \theta_{[N' \cup \{i''\}]^s}) + p_{i''}(B_{i''}, \theta_{[N' \cup \{i'\}]^s}) - p_i(B_i, \theta_{N'^s}) \geq 0$ が成立する．

以上より，ある入札者が名義を分割することで，効用は増加しない．したがって Case 1 では，名義選択メカニズムは非優加法的価格増加条件を満たしている．

次に Case 2 より，勝者とならない名義を追加して効用を増加させる場合を考える．補題 1 より，入札者の増加によって支払額は減少しないため，Case 2 では，名義選択メカニズムは非優加法的価格増加条件を満たす．

以上における全ての状況において，名義選択メカニズムは弱匿名価格ルールと非優加法的価格増加条件を同時に満たしている．したがって，名義選択メカニズムは架空名義操作不可能性を満たすといえる． □

4　結論

本論文では，VCG メカニズムをベースとした名義選択メカニズムを提案した．名義選択メカニズムは，任意の評価値を持つ入札者に対して適用可能であることを示し，さらに架空名義入札に頑健であることを示した．

名義選択メカニズムは VCG メカニズムをベースとしており，入札者 i における支払額は i 以外の入札者の評価値によって計算される．本論文では，各入札者は k 人のただ 1 つのバンドルを欲しがる single-minded bidders である入札者に分割可能であるとした．名義選択メカニズムは，分割された入札者の集合の中で評価値の和が最大となる名義を選択して支払額の計算を行う．常に評価値の和の最大値を支払額とするので，入札者の増加に対して支払額が非減少であるという性質を名義選択メカニズムは持っている．そのため，任意の入札者が財を割り当てられない架空名義を追加しても支払額は非減少である．また，名義を分割して財を獲得するとき，名義選択メカニズムでは支払額は非減少であることが示された．したがって，名義選択メカニズムは架空名義入札に頑健であることが示された．しかし，名義選択メカニズムは，入札者の増加に対して支払額は非減少であるという性質を持っているため，VCG メカニズムに比べると財を割り当てる条件が厳しく，効率が悪い点が難点である．

今後の課題として，名義選択メカニズムを基に，より効率の良い架空名義入札に頑健なメカニズムを設計することが挙げられる．既存のメカニズムと名義選択メカニズムを比較することで，より良いメカニズムが設計できると著者らは考えている．また既存の架空名義操作不可能なメカニズムは複数提案されているが，中には single-minded bidders である入札者に限定された条件付きのメカニズムが存在する．これらの条件付きのメカニズムを一般の場合に適用可能となるように拡張するためのルールが存在すると著者らは考えている．

参考文献

[1] Peter Cramton, Yoav Shoham, and Richard Steinberg, editors. *Combinatorial Auctions*. MIT Press, 2005.

[2] Sven de Vries and Rakesh V. Vohra. Combinatorial auctions: A survey. *INFORMS Journal on Computing*, Vol. 15, No. 3, pp. 284–309, 2003.

[3] Benjamin Edelman, Michael Ostrovsky, and Michael Schwarz. Internet advertising and the generalized second-price auction: Selling billions of dollars worth of keywords. *American Economic Review*, Vol. 97, No. 1, pp. 242–259, 2007.

[4] Bengt R. Holmstrom. Groves' scheme on restricted domains. *Econometrica*, Vol. 47, No. 5, pp. 1137–1144, 1979.

[5] Atsushi Iwasaki, Vincent Conitzer, Mingyu Guo, Taiki Todo, Yoshifusa Omori, Yuko Sakurai, and Makoto Yokoo. Worst-case efficiency ratio in false-name-proof combinatorial auction mechanisms. In *the Proceeding of the Ninth International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, pp. 633–640.

[6] Yuko Sakurai, Makoto Yokoo, and Shigeo Matsubara. A limitation of the generalized Vickrey auction in electronic commerce: Robustness against false-name bids. In *the Proceedings of the Sixteenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)* , pp. 86–92, 1999.

[7] Hal R. Varian. Economic mechanism design for computerized agents. In *the Proceedings of the 1st Usenix Workshop on Electronic Commerce*, New York, 1995.

[8] Hal R. Varian. Position Auctions. *International Journal of Industrial Organization*, Vol. 25, No. 6, pp. 1163–1178, 2007.

[9] Makoto Yokoo. Characterization of strategy/false-name proof combinatorial auction protocols: Price-oriented, rationing-free protocol. In *the Proceedings of the Eighteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pp. 733–742, 2003.

[10] Makoto Yokoo, Yuko Sakurai, and Shigeo Matsubara. Robust combinatorial auction protocol against false-name bids. *Artificial Intelligence*, Vol. 130, No. 2, pp. 167–181, 2001.

[11] Makoto Yokoo, Yuko Sakurai, and Shigeo Matsubara. The effect of false-name bids in combinatorial auctions: New fraud in internet auctions. *Games and Economic Behavior*, Vol. 46, No. 1, pp. 174–188, 2004.

[12] 横尾真, 櫻井祐子, 松原繁夫. 架空名義表明のメカニズムデザインに対する影響：インターネットでの集団意思決定に向けて. コンピュータソフトウェア, Vol. 17, No. 5, pp. 445–454, 2000.

[13] 横尾真, 櫻井祐子, 松原繁夫. 架空名義入札に頑健な組合せオークションプロトコル. 情報処理学会論文誌, Vol. 43, No. 6, pp. 1814–1824, 2002.

[14] 横尾真. オークション理論の基礎 –ゲーム理論と情報科学の先端領域–. 東京電機大学出版局, 2006.