1B-03

確率分布ベクトル解析

小池　伸†

トヨタ自動車株式会社†

1. はじめに

ハードやソフトの設計においてバラツキを精度良く扱うことは，その性能と信頼性に大きな影響を与える．筆者は車両制御，運転支援，アクチュエータ等の設計で，ドライバー操作量，認識センサー出力，車両状態量などの複数パラメータを分布として演算することで従来の数値演算と比べて精度のよい設計ができることを示し，その効果を参考文献(2)(3)で公開してきた．ここでは，その手法を積分に拡張することで分布によるベクトル解析の可能性を提案する．

2. 数値演算の精度限界

バラツキがあるパラメータ間で数値演算を行う場合，データを増やしてパラメータが特定の分布に収束しても演算後の結果の分布は収束しない場合がある．正確な分布を求める為に必要な情報は演算回数が増えると指数的に増加するのに対して、分布に反映される情報はそれほど多くないので結果が偶然の影響を受けやすい．確からしい分布を求める為には，パラメータそれぞれの分布を作成して，それらの分布を使ってこの後述べる分布演算を行う必要がある．参考文献(2)(3)ではこの分布演算を，様々なハードやソフトの設計に活用した例を示してきた．

本稿では，分布演算を積分に拡張し，時間積分により放物線運動をする砲弾の飛距離を分布で求め，数値演算と比較することで数値演算には精度限界があり，分布演算を行うことで初めて再現性がある分布が求まることを説明する．

3. 分布演算

砲弾の時間積分を定義する為に，ある時点の速度 v と加速度 α を分布で与え，単位時間後（1 秒後）の速度を求める分布の和算 v+α を例にして演算を説明する．ここでは分布を簡素化して v と α を図 1 のように 10 個のデータで作成したヒストグラムで与える．速度の範囲は $v=v_0\tilde{}v_0+3$m/s,

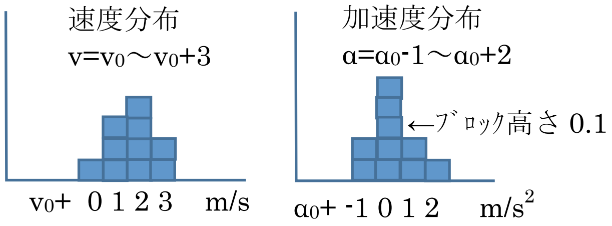

図 1. データ 10 個の速度と加速度の分布

加速度は $\alpha=\alpha_0-1\tilde{}\alpha_0+2m/s^2$ なので 1 秒後の速度分布 v+α の範囲は $v_0+\alpha_0-1\tilde{}v_0+\alpha_0+5$ m/s になる．この速度範囲のそれぞれの値において，v と α の和がその値になる(v, α)の全ての組合せで確率値の積を合計すれば演算後の分布の確率値を求める事ができる．図 2. にそれらの確率値の演算式を示した．実際は 10 個より多数のデータか

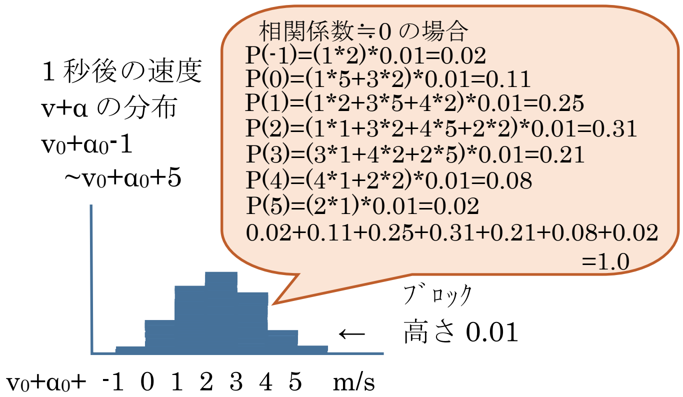

図 2. v と α の和の分布演算結果

らカーネル分布で近似して精度の高い分布演算を行った．同様の考え方で四則演算や多次元ベクトル演算が可能だ．参考文献(2)(3)(4)参照．

4. 分布演算による時間積分

微小時間を dt として，n*dt 秒後の時点の速度分布を v_n，加速度分布 α_n として $v_{n+1}=v_n+\alpha_n*dt$ が求まれば n=0 から繰返し演算することで時間積分によるシミュレーションが可能になる．ここで α_n*dt は α_n を dt の割合に微小分割した分布で 1/dt 個合計すると α_n となる分布の事である．ところが，分布演算は逆演算が求まらないので α_n*dt(図 3)は演算できない．そこで，先ほど求めたように $v_n+\alpha_n$ の分布を求め，$v_n\rightarrow v_n+\alpha_n$ の等高線を特徴点とするモーフィングを行う．v_n

「Probability Distribution Vector Analysis」
†「Shin Koike ・Toyota Motor Corporation」

から $v_n+\alpha_n$ に至る変化を 1 とすると，全体の dt だけモーフィングで変化させた分布を $v_{n+1}=v_n+\alpha_n*dt$ の近似とした，これは 1/dt 回行うと，$v_n+\alpha_n$ に近い分布になるので良い近似だと考えている．図 4. に $v_n+\alpha_n*dt$ の演算イメージを示す．

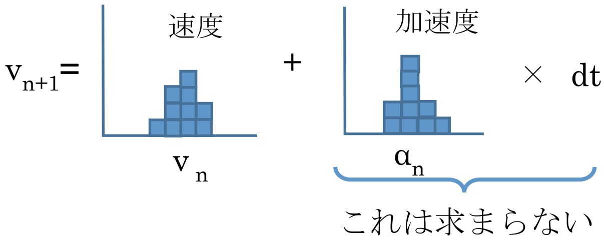

図 3. $v_{n+1}=v_n+\alpha*dt$ の分布演算

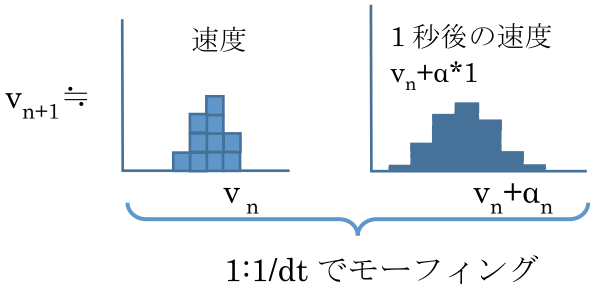

図 4. $v_{n+1}=v_n+\alpha*dt$ の近似

実際の演算では，風の抵抗、初期位置、初速度で距離と高さ 2 次元のバラツキを与えた砲弾の放物線運動を演算した．手順として各パラメータで n=500，2000，20000 個の乱数を生成して数値演算でシミュレートし飛距離のヒストグラムを作成する．次に数値演算と同じ乱数データのヒストグラムを近似した分布から先に述べた分布演算の時間積分を行い飛距離の分布を求めた．以上を同じ条件で 3 回乱数を生成させて行い再現性を比較した．弾丸に働く加速度 α は，風速 w と速度 v による空気抵抗と重力加速度 g から 2 次元ベクトルとして以下の式で求めた．

$\alpha_n = g + const*(v_n + w)^2/M$

上記 α を使って以下の時間積分を数値演算と分布演算で実施，演算条件を近づける為に数値演算では風の抵抗を飛行中定期的に変動させた．

$v_{n+1} = v_n + \alpha_n*dt$

$x_{n+1} = x_n + v_n*dt$

5. 数値演算と分布演算の演算結果比較

図 5 に n=500~20000 個の風速のヒストグラム，数値演算と分布演算の飛距離分布を示す．図 6 は同条件で 3 回乱数を生成/演算した 9m, 10m, 11m 近辺の面積(そこに着地する確率)の変動量を示す．数値演算はデータ 2000 個以下で 10%，20000 個で 5%程度の変動で，飛行中の風速変動量に応じて分布の位置が変動する．分布演算は 500 個でも数%の変動に収まるが，分布範囲が広く v と α の相関の与え方に改善が必要かもしれない．

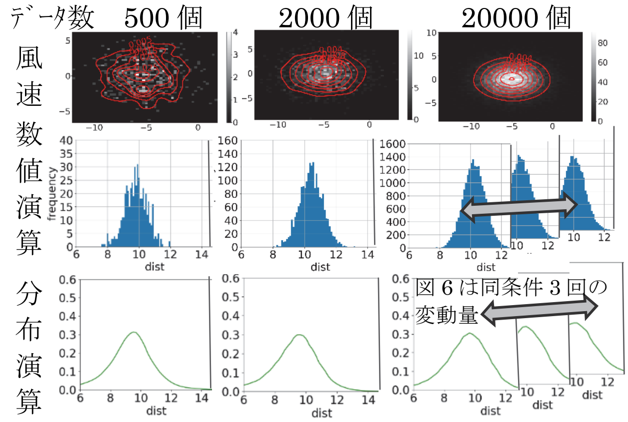

図 5. 飛距離分布

ﾃﾞｰﾀ	数値演算	分布演算
500	7.0~12.8%	1.3~4.5%
2000	2.1~10.8%	1.1~2.9%
20000	2.0~5.4%	1.1~2.5%

図 6. 飛距離分布の確率値変動量

以上の様に数値演算はデータを増やしても結果の分布は変化が大きく、分布演算では少ないデータ数で比較的安定した分布が得られる．

6. まとめ

分布による演算で積分を定義してパラメータを分布のままシミュレートできる事を示し、2 次元の運動方程式の解を求めた．従来の数値演算では入力データが特定の分布に収束しても，結果の分布は収束せず再現性が低い，それに対して分布による演算では少ないデータでも比較的安定した結果の分布が求まる事を示した．数値演算はバラツキがあるデータを扱う場合に精度限界があり，分布による演算はその限界を補間して改善できる可能性がある．これは他の様々な微分方程式の解でも同じだと考える．

参 考 文 献

(1) 中川 健治: モンテカルロシミュレーション基礎，通信ソサイエティマガジン，No.6 P11-20 秋号 2008

(2) 小池 伸: 市場走行データを活用した設計手法,トヨタテクニカルレビュー，Vol.64， 日本語版 p .95-102 (2018/5) 英語版 p.96-103(2018/9)

(3) 小池 伸: ビックデータを活用した制御リスク設計，自動車技術会 2020 年秋季大会学術講演会公演予稿集,

(4) 小池 伸:確率分布ベクトル解析ソフト(2020/10 公開) https://github.com/skoike/bunpu