4F−4 カオスモンテカルロ計算における変数精度の影響

*1 月江 伸弘 *1 松永 俊雄
*1 東京工科大学大学院工学研究科

1 はじめに

カオスの乱数としての適用はさまざまな議論がされている．その中で，ロジステック写像（Ulam−von Neumann 写像）から求められた時系列の乱数としての利用は適さないと示されている．[1]

ここで梅野健氏によるカオス解のモンテカルロ法への適用は，特殊用途乱数の視点からカオスの性質である負相関性による収束性の早さ，および「解けるカオス」による不変測度の関数化により，その有効性が確認された．[2, 3] この手法は，カオスモデルから求められた解の経験測度が，不変測度の関数を満たしているということを前提とするが，カオスモデルに使用する変数精度によっては不変測度を必ずしも満足をしない．

本報告は，異なる変数精度により計算を行い，カオスモンテカルロ計算において必要な変数精度および IEEE754 倍精度の適用性を述べる．

2 カオスモンテカルロ法

一般的なモンテカルロ計算法の式を以下に示す．

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Q(X_i)=\int_{\mathbf{M}}Q(x)\mu(dx) \tag{1}$$

式（1）は決定論的方程式 $X_{n+1}=F(Xn)$ より求めた不変測度 $\mu(dx)$ をもつ物理量 $X_n\in\mathbf{M}$ を用いて，関数 $Q(x)$ の積分を解くことにある．ここで，式（1）が成立する条件として決定論的方程式から求められた数列がエルゴード性を持つことが条件となる．

カオスモンテカルロ法は，密度関数が観測可能 $\mu(dx)=\rho(x)dx$ であるという特殊性に着目し，可解なカオスと呼ばれる確率的振る舞いが明示的に解るエルゴード写像が，三角関数を含む楕円関数の加法定理により統計的に構成できることを利用したものである．ロジステック写像（Ulam−von Neumann 写像）$X_{n+1}=4X_n(1-X_n)$ を決定論的カオスとして使用した場合，不変測度 $\rho(x)=1/(\pi\sqrt{x(1-x)})$ となる．[3]

3 検証方法

カオス解を計算機のもつ有限精度の変数精度を使用して求めるため，その解にはカオスとして本来持たない周期解が現れる．この解の利用が，カオスモンテカルロ計算にどのような影響を与えるかを，変数精度を変えて見ることとする．

使用する変数精度として，以下の3つについて行った．

- 10 進 7 桁精度
- 10 進 10 桁精度
- IEEE754 倍精度（有効桁数約 15 桁）

10 進 7 桁，10 進 10 桁精度については，仮想計算機（倍精度より求めた 10 進の数値を指定した変数精度まで残し，それ以外の桁を切り捨てる）を用いて求めている．なお，単精度については，初期値の値によって求められた値が，$0.0, 0.5, 1.0$ などに安易に丸められ，観測が不可能となることから使用していない．

カオスモンテカルロ法で使用する決定論的方程式は $X_{n+1}=4X_n(1-X_n)$ を使用，領域 $0\leqq x,y\leqq 1$ における $Q(x)=x^2y^3$ の 2 重積分を変数精度を変えて計算を行った．

4 結果

4.1 経験測度

図 1 にロジステック写像の不変測度と変数精度による経験測度を示す．経験測度では，$N=1000000$ の

Effect of variable precision in the calculation of chaos monte carlo methods
*1Nobuhiro Tsukie,*1Toshio Matsunaga
*1Graduate School of Systems Electronics, Tokyo University of Technology

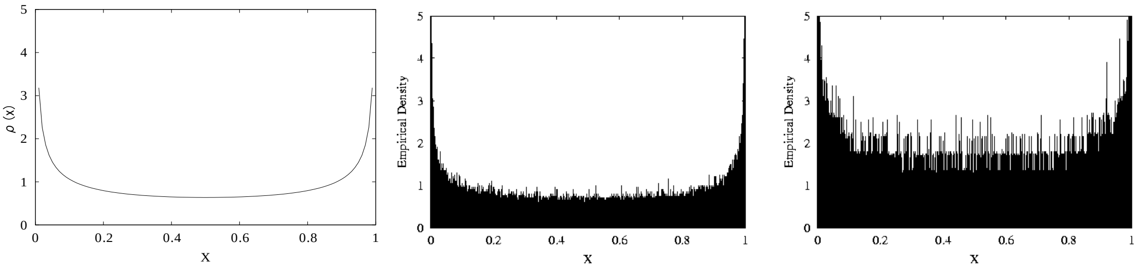

図 1: $\rho(x) = 1/(\pi\sqrt{x(1-x)})$ の厳密な不変測度と変数精度による経験測度（左：厳密な不変測度，中：倍精度，右：10 進 10 桁精度）

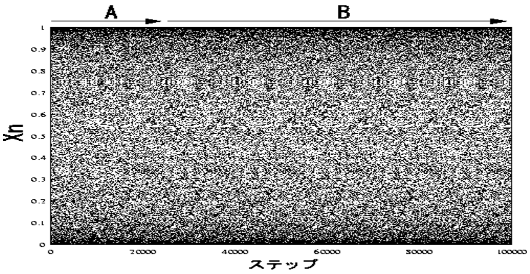

図 2: 周期解が存在する時系列解

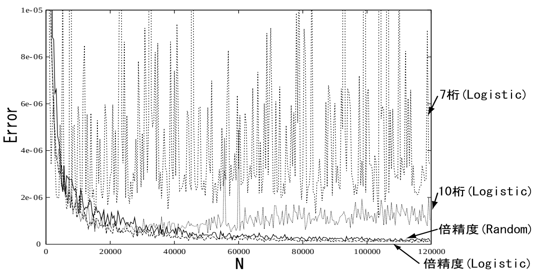

図 3: $\int_0^1 \int_0^1 x^2y^3dxdy$ のカオスモンテカルロ計算

データから求めた．図 1 から，倍精度より求められた経験測度は，厳密な不変測度によく一致している．一方，10 進 10 桁精度では不変測度と大きなずれがあり，10 進 12 桁精度まであることを確認した．

4.2 変数精度による周期解の存在

図 2 に 10 進 10 桁精度を使用し，初期値 $X_0 = 0.1$ より求めた時系列解を示す．

周期の開始点は初期値の値によって異なるが，図 2 から B に示す範囲に周期解が存在することを確認できる．変数精度を上げると，図 2 の A の領域および B の領域にある周期解の周期間隔が伸びる．周期解は 10 進 12 桁精度まで目視による確認ができた．それ以上の精度になると確認は困難となったが，倍精度の時系列にも周期解が存在することが推測される．

4.3 カオスモンテカルロ計算による結果

各変数精度において，50 個の異なる初期値をランダムに選び，カオスモンテカルロ計算により積分を行い，計算結果と厳密な値（1/12）との差の自乗平均を求めた．乱数の数 N による自乗平均の推移を図 3 に示す．

図 3 から，10 進 7 桁，10 桁精度での推移が倍精度を使用した計算結果と同じ推移になる部分と，途中から大きく外れているものがあることがわかる．この 2 つの推移を図 2 の時系列と比較すると，前者が A の解を使用，後者が B の領域も含めた解を使用したものに相当する．このことから周期解を含む解の使用が計算結果に大きく現れていることがわかる．

5 おわりに

本報告では，ロジスティック写像（Ulam−von Neumann 写像）を使用したカオスモンテカルロ計算について，使用する変数精度により，カオスモデルにより得られた経験測度が不変測度と大きく異なることを見た．その結果，任意の積分値に対する収束に大きな影響を与えることを確認した．この場合，最低限必要な変数精度は，10 進 13 桁精度以上であり，計算機で一般的に使用される IEEE754 倍精度の適用性は十分にある．

参考文献

[1] 香田徹, 柿本厚志, 擬似乱数とカオス，情報処理学会論文誌, vol.27, no.3, pp.289-296, March 1986.

[2] 梅野健, モンテカルロ法におけるカオス乱数の有効性, 電気学会研究資料，情報処理研究会，IP-99-7, pp.29-36, 1999

[3] 梅野健, カオスと計算 別冊数理科学：特集「カオス研究の最前線」, vol.35, pp.156-168, Sep. 1999